Φυλλάδιο Μαθηματικών επανόδου

Ιούνιος 2020

1. Εισαγωγή στις Μονάδες Μέτρησης - Μέτρηση Μήκους
2. Μέτρηση Εμβαδού Επιφάνειας
3. Μέτρηση Εμβαδού Παραλληλόγραμμου & Τρίγώνου
4. Ασκήσεις
5. Λύσεις Ασκήσεων (Ασκ 3 και 4)
6. Εμβαδό τραπεζίου
7. Εμβαδό Κύκλου (ή Κυκλικού δίσκου)

[Ιούνιος 2020

Αθήνα - Παγκράτι

2ο Δημοτικό Σχολείο Αθηνών

Η δασκάλα του ΣΤ2

Φωτεινή Μπαγέρη]

1 - Εισαγωγή στις Μονάδες Μέτρησης
- Μέτρηση Μήκους

Από τα πρώτα του βήματα ο άνθρωπος πάνω στη γη ,αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να μετράει για να μπορέσει να καλύψει τις βασικές του ανάγκες ,όπως π.χ. να μετράει αποστάσεις ,επιφάνειες ,βάρη
και τον χρόνο (όπως και πολλά άλλα μεγέθη που στο πέρασμα των χρόνων έγιναν αναγκαία και χρήσιμα στη ζωή του) .
Σίγουρα στην αρχή όλα ήταν εμπειρικά (π.χ. την απόσταση την όριζε ως απόσταση μεταξύ 2 αντικειμένων ,ας πούμε μεταξύ της σπηλιάς του και του δάσους απέναντι που πήγαινε για κυνήγι ,το βάρος ως το βάρος που μπορούσε εύκολα να σηκώσει ή το βάρος που ζύγιζε ένα αντικείμενο που χρησιμοποιούσε καθημερινά και τον χρόνο ,από το ένα ξημέρωμα στο άλλο, δηλαδή μια μέρα.
Και κάπως έτσι όρισε τις μονάδες μέτρησής του.

Γρήγορα κατάλαβε όμως ότι:

α) Στην καθημερινότητά του είχε να μετρήσει **ποσότητες** άλλες **μεγάλες** και άλλες **μικρότερες** (π.χ. βάρος ενός κορμού δέντρου και βάρος μιας κατσίκας).
Ετσι και με την πρόοδο που έκανε στα μαθηματικά/αριθμητική του (με το πέρασμα των ετών βέβαια) αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να εισάγει **υποδιαιρέσεις** και **πολλαπλάσια** αυτών (π.χ τόνους , κιλά , γραμμάρια κλπ).

β) Για να μπορεί να επικοινωνεί με τους άλλους ανθρώπους και να εννοούν το ίδιο πράγμα στις μετρήσεις τους,έπρεπε να έχουν όλοι τις **ίδιες** μονάδες μέτρησης **ή ισοδύναμες** (δηλαδή η μια μονάδα να είναι πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο της άλλης ,όπως θα δούμε παρακάτω)
(π.χ τόνοι και κιλά, μέτρα και εκατοστά κλπ).
(ένα άλλο παράδειγμα είναι ότι οι Βρετανοί μετράνε το βάρος σε λίβρες ενώ οι περισσότεροι άλλοι λαοί σε κιλά όπου (πληροφοριακά και μόνο) ισχύει ότι: 1λίβρα = 454 γραμμάρια = 0,454 κιλά).

Όπως γνωρίζουμε από την καθημερινότητά μας ,οι **κύριες μονάδες μέτρησης του μήκους** είναι οι:

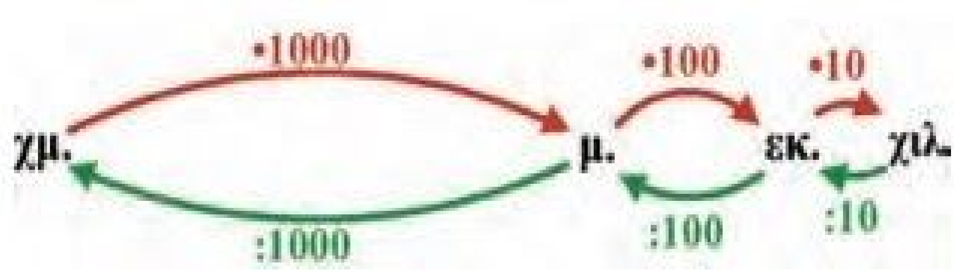
χιλιόμετρα (χμ) ,μέτρα (μ) ,εκατοστά (εκ) ,χιλιοστά (χιλ)

και οι σχέσεις μεταξύ τους είναι οι εξής: **1χμ. = 1000μ.**

1μ. = 100εκ.

1εκ. = 10χιλ.

(επίσης 1μ = 10 δέκατα του μέτρου ,δηλαδή: 1μ = 10 δεκ ,όπου όμως η υποδιαίρεση αυτή (δέκατο) δεν χρησιμοποιείται πλέον πολύ στην καθημερινότητά μας)
οι οποίες (παραπάνω σχέσεις) προκύπτουν εύκολα από το παρακάτω διάγραμμα που έχει το σχολικό μας βιβλίο στη σελ: 120



Παραδείγματα

1) 1 χιλιόμετρο πόσα εκατοστά είναι;

έχουμε: **1χμ** = 1 • 1000 μ = 1000 μ
= 1000 • 100 εκ
= **100.000 εκ**

Δηλαδή: **1χμ = 100.000 εκ**

2) Τα 7.360.000 χιλιοστά πόσα χιλιόμετρα είναι;

έχουμε **7.360.000 χιλ** = $\frac{7.360.000}{10}$ εκ = 736,000 εκ

= $\frac{736.000}{100}$ μ = 7,360 μ

= $\frac{7.360}{1000}$ χμ = **7,36 χμ**

Δηλαδή **7.360.000 χιλ = 7,36 χμ**

Τρόποι γραφής:

(Υπενθύμιση: **συμμιγής αριθμός** είναι κάθε δεκαδικός αριθμός (**1.20μ**) που εκφράζεται με τη μορφή **1μ. 20εκ.**)

Οπότε έχουμε: **1 μέτρο και 20 εκατοστά = 1μ. 20εκ.**

= 120 εκ

= $\frac{120}{100}$ **μ**

= 1,2 μ

Επιπροσθέτως ,δεν ξεχνούμε ότι **ποτέ** δεν προσθέτουμε ανόμοια/διαφορετικά πράγματα ,παρά **μόνο ίδια .**

Δηλαδή **απαγορεύεται** να προσθέσουμε στα μέτρα ,εκατοστά ,χιλιοστά κλπ ,**παρά μόνο :**

- **χιλιόμετρα με χιλιόμετρα**
- **μέτρα με μέτρα**
- **εκατοστά με εκατοστά**
- **χιλιοστά με χιλιοστά**

και αν έχουμε **διαφορετικές** μονάδες μέτρησης να προσθέσουμε (ή και να αφαιρέσουμε) τότε επιλέγουμε μια κοινή μονάδα που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε και όλες τις διαφορετικές ,τις μετατρέπουμε σε αυτή (την κοινή μονάδα μέτρησης που επιλέξαμε).

Παράδειγμα: (εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ.120)

Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα φαίνονται οι τελευταίοι σταθμοί στη διαδρομή της ολυμπιακής φλόγας μέχρι το βωμό του Σταδίου στην Αθήνα το 2004. Υπολόγισε την απόσταση που διάνυσαν οι λαμπαδηδρόμοι μεταφέροντας τη φλόγα σε αυτή τη διαδρομή.

Λύση:

Για να βρούμε τη ζητούμενη απόσταση θα προσθέσουμε τις πέντε αυτές αποστάσεις (μήκη των πλευρών του σχήματος).

1. Θα μετατρέψουμε όλα τα μήκη των πλευρών σε χιλιόμετρα

- Ο συμμιγής αριθμός 9χμ. 800μ. θα μετατραπεί σε χμ.

έχουμε: **9χμ. 800μ.** = 9χμ. + $\frac{800}{1000}$ χμ.

= 9χμ. + 0,8χμ.

= **9,8χμ**.

- Τα 2500μ.θα μετατραπούν σε χμ.

έχουμε: **2.500μ**. = $\frac{2,500}{1000}$ χμ.

= **2,5 χμ.**

- Τα 560μ.θα μετατραπούν σε χμ.

έχουμε: 560μ. = $\frac{560}{1000}$ χμ.

= **0,56χμ.**

2. Θα κάνουμε την πρόσθεση των μηκών των πλευρών του παραπάνω σχήματος

9,8χμ. + 10χμ. + 12,5χμ. + 2,5χμ. + 0,56χμ. = **35,36χμ**.

Άρα η απόσταση που διάνυσαν οι λαμπαδηδρόμοι μέχρι τον βωμό του Σταδίου

είναι: **35,36χμ.**

2 - Μέτρηση Εμβαδού Επιφάνειας

Είδαμε στο προηγούμενο μάθημά μας (Φύλλο 1) ότι ο άνθρωπος από την ανάγκη του να αντιμετωπίσει διάφορα προβλήματα της καθημερινότητάς του ,αναγκάστηκε/χρειάστηκε να βάλει στη ζωή του το **“μέτρο”** (όπου σιγά σιγά εισήγαγε πολλαπλάσια και υποδιαιρέσεις του όπως είδαμε) ,πράγμα το οποίο έχει γίνει γνωστό σε μας από τα διάφορα και σε πολλές περιοχές του κόσμου ,ευρήματα των αρχαιολόγων.

Σήμερα θα ασχοληθούμε με τις μετρήσεις εμβαδών επίπεδων σχημάτων. (δείτε την ενδιαφέρουσα ιστορική σημείωση) [1]

Υπενθυμίσεις από την Ε’ Δημοτικού:

(δες τους σχετικούς συνδέσμους **Μονάδες Μέτρησης Επιφάνειας Ε' Δημοτικού**
& Εμβαδόν τετραγώνου,ορθογωνίου & ορθογ.τριγώνου

Οπότε θυμόμαστε ότι:

1) όταν θέλουμε να μετρήσουμε το **εμβαδόν** ενός (επίπεδου) σχήματος,ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε **πόσες φορές χωράει μέσα σε αυτό ένα τετράγωνο** με μήκος πλευράς 1-μονάδα
(όπου μια μονάδα μέτρησης μήκους όπως έχουμε δει είναι 1χμ. ,1μ. ,1δεκ. , 1εκ. ,1χιλ.)

2) Εμβαδό τετραγώνου

Ένα **τετράγωνο με πλευρά μήκους = α** έχει εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τετραγ}} = \text{μήκος πλευράς} \cdot \text{μήκος πλευράς} =$$

$$= \text{μήκος πλευράς}^2$$

$$= \alpha^2$$

[1] Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. (από το σχολικό βιβλίο β’ Γυμνασίου)

δηλ: $E_{τετραγ} = α^2$

Οπότε αφού:

$E_{τετραγ}$ = μήκος πλευράς^2 **και** το μήκος πλευράς μετριέται σε μονάδες,

τότε το

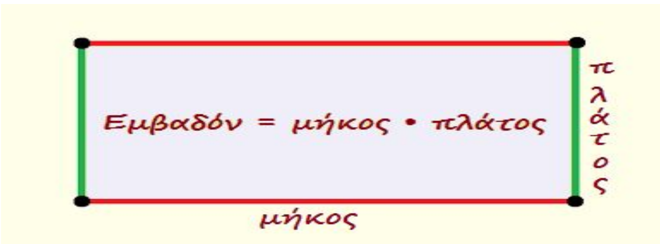
$E_{τετραγ}$ μετριέται σε **τετραγωνικές μονάδες = τ.μ =** μονάδες^2

Άρα αφού οι μονάδες μέτρησης μήκους όπως έχουμε δει είναι οι: 1χμ. , 1μ. , 1δεκ. , 1εκ. , 1χιλ.

τότε από τα παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι: ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

οι μονάδες μέτρησης εμβαδού είναι οι: $1χμ^2$, $1μ^2$, $1δεκ^2$, $1εκ^2$, $1χιλ^2$

3) Εμβαδόν ορθογωνίου (παραλληλόγραμμου)



Ένα **ορθογώνιο** με πλευρές **α** και **β**
(τις οποίες ονομάζουμε συνήθως **μήκος = βάση = α και πλάτος = ύψος = β**) έχει εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο:

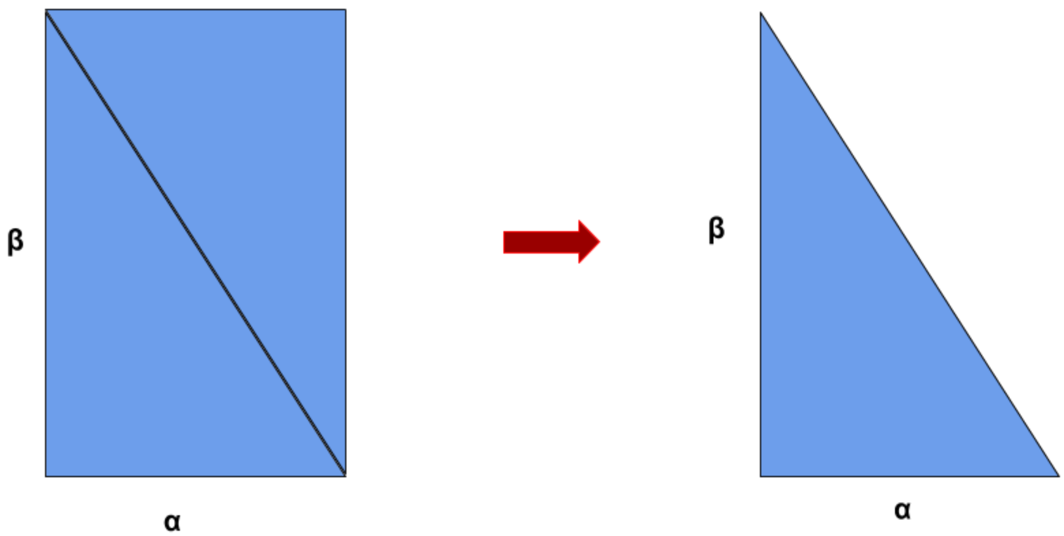
$E_{ορθογ}$ = μήκος • πλάτος

= βάση • ύψος

= α • β

δηλ: $E_{ορθογ}$ **= α • β**

4) Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου



Ένα **ορθογώνιο τρίγωνο** με κάθετες πλευρές **α** και **β** (τις οποίες συνήθως ονομάζουμε: **βάση = κάθετη πλευρα α** **και** **ύψος = κάθετη πλευρά β**) όπως εύκολα φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα ,προκύπτει από τον διαχωρισμό του μέσω μιας διαγωνίου του (δηλαδή σε 2 ίσα ορθ.τρίγωνα)

Οπότε εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

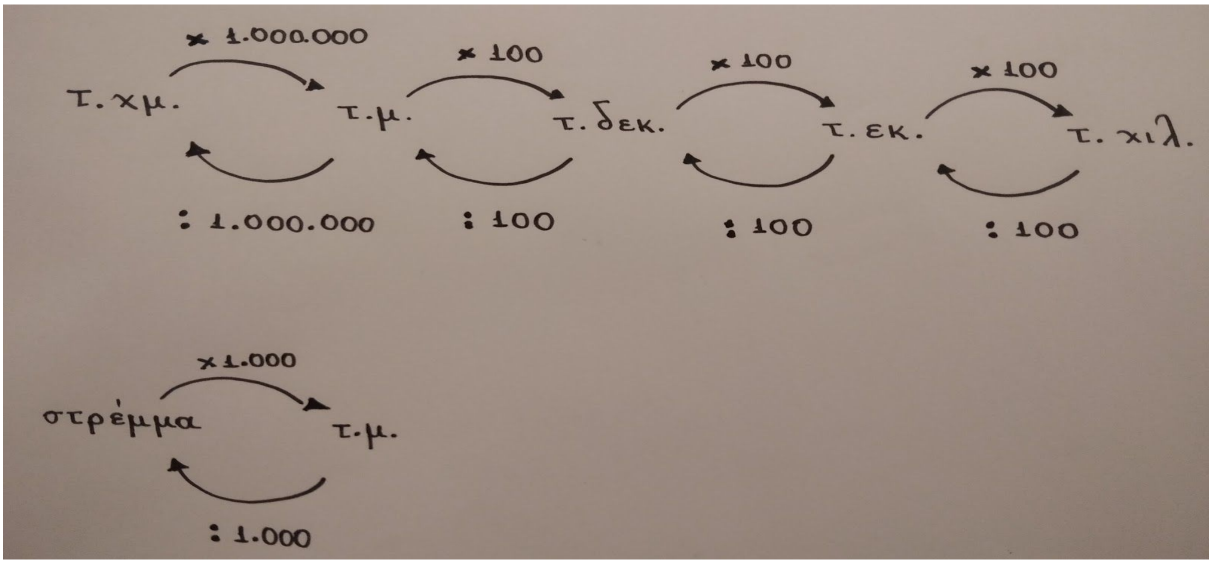
$$E_{ορθ.τριγώνου} = \frac{E_{ορθογωνίου}}{2}$$

$$= \frac{βάση \cdot ύψος}{2}$$

$$= \frac{α \cdot β}{2}$$

δηλ: $$E_{ορθ.τριγώνου} = \frac{α \cdot β}{2}$$

4) Οι μετατροπές των μονάδων μέτρησης εμβαδού βρίσκονται/δίνονται εύκολα από το παρακάτω διάγραμμα:



Τρόποι γραφής:

Για να εκφράσουμε το εμβαδόν ,μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε: συμμιγή,δεκαδικό ,φυσικό ,μεικτό ή κλασματικό αριθμό

Όπου θυμόμαστε ότι **μεικτός αριθμός** είναι **κάθε αριθμός της μορφής:** $4\frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$

Παραδείγματα:

1) Να μετατρέψετε τα **107.020.000 τ.εκ. σε τ,χμ,**

έχουμε: $\mathbf{107.020.000}$ εκ.^{2} $= \frac{107.020.000}{100}$ δεκ.^{2}

$= 1.070.200$ δεκ.^{2}

$= \frac{1.070.200}{100}$ μ.^{2}

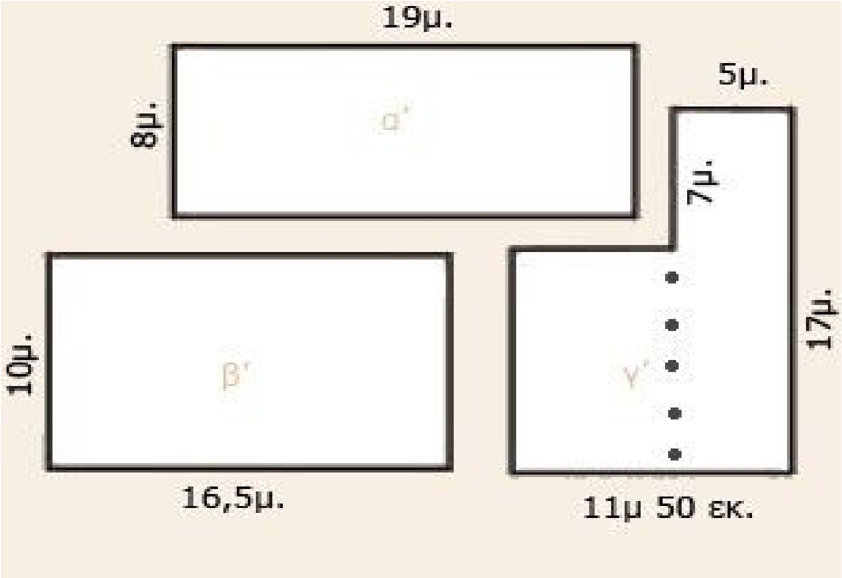
$= 10.702$ μ.^{2}

$= \frac{10.702}{1.000.000}$ χμ.^{2}

$=$ **0,010702** χμ.^{2}

δηλ: **107.020.000** εκ.^{2} **= 0,010702** χμ.^{2}

2) (εφαρμογή του σχολ.βιβλίου στη σελ. 148)
Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων



Λύση:

Για τις περιμέτρους έχουμε:

σχήμα α': $\Pi_{\text{ερίμετρος}}$ = 19+8+19+8 = 19•2 + 8•2 = 38 + 16 = **54μ.**

σχήμα β': $\Pi_{\text{ερίμετρος}}$ = 16,5+10+16,5+10 = 16,5•2 + 10•2 = 33 + 20 = **53μ.**

σχήμα γ': **[μετατρέπουμε όλες τις μονάδες μέτρησης σε μέτρα (μ.)]**

οπότε έχουμε ότι: **11μ. 50εκ.** = 11μ. + 50εκ.

= 11μ. + $\frac{50}{100}$ μ.

= 11μ. + 0,5μ. = **11,5μ.**

δηλ: **11μ. 50εκ. = 11,5μ.**

Οπότε οι πλευρές του σχήματος γ΄,ξεκινώντας από την πάνω-πάνω πλευρά (5μ.) και συνεχίζοντας δεξιόστροφα (όπως οι δείκτες του ρολογιού) είναι αυτές με μήκη:

5μ. ,17μ. ,11,5μ. ,(17-7)μ. ,(11,5-5)μ. ,7μ.

Άρα $\Pi_{ερίμετρος}$ = 5+17+11,5+10+6,5+7 = **57μ.**

Για τα εμβαδά έχουμε:

σχήμα α': $E_{ορθόγ}$ = μήκος • πλάτος = 19 • 8 = **152τ.μ. (** μ^2 **)**

σχήμα β': $E_{ορθόγ}$ = μήκος • πλάτος = 16,5 • 10 = **165τ.μ. (** μ^2 **)**

σχήμα γ': **[Αν το σχήμα μας δεν είναι κάποιο από τα γνωστά ,τότε το χωρίζουμε σε γνωστά σχήματα των οποίων υπολογίζουμε και προσθέτουμε τα εμβαδά]**

συγκεκριμένα εδώ έχουμε προεκτείνει την πλευρά 7μ. (δες στο σχήμα διαγώνια γραμμή στο παραλληλόγραμμο)
και προκύπτουν 2 νέα ορθογώνια:

μεγάλο ορθογώνιο με πλευρές: μήκος = 5μ. και πλάτος = 17μ.

μικρό ορθογώνιο με πλευρές: μήκος = (11,5-5)μ. και πλάτος = (17-7)μ.

Άρα τελικά θα έχουμε ότι:

$E_{μεγάλου\ ορθογ}$ = μήκος • πλάτος = 5 • 17 = **85τ.μ. (** μ^2 **)**

και

$E_{μικρού\ ορθόγ}$ = μήκος • πλάτος = 6 • 10 = **60τ.μ. (** μ^2 **)**

3 - Μέτρηση Εμβαδού Επιφάνειας α) Εμβαδόν παραλληλογράμμου
β) Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου

Όπως και στο προηγούμενο φυλλάδιο έτσι και σε αυτό θα χρειαστούμε κάποιες υπενθυμίσεις από την Ε' Δημοτικού ,τις οποίες θα προσπαθήσω να κάνω χωρίς να σας κουράσω ιδιαίτερα ,χρησιμοποιώντας πιο πολύ τη διαίσθησή μας ,την φαντασία μας και με τη βοήθεια σχημάτων να μπορούμε να τα θυμηθούμε εύκολα.
Θυμόμαστε λοιπόν ότι:

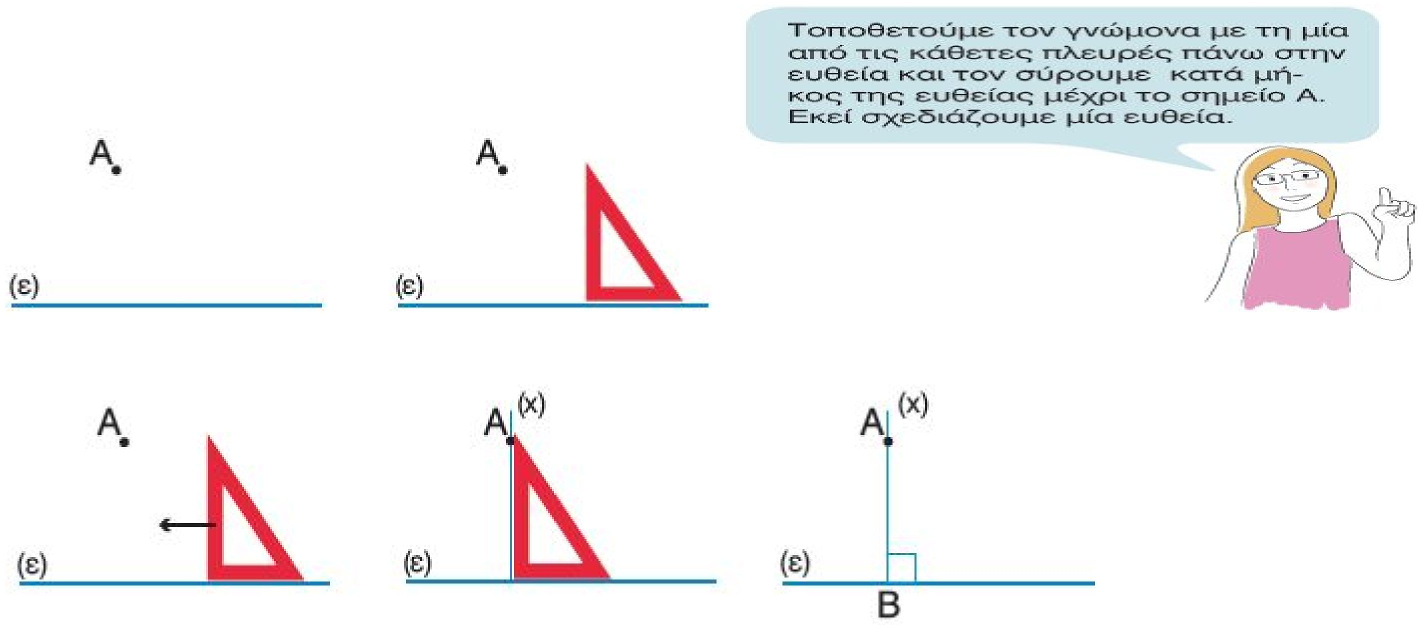
1) Όταν έχουμε ένα σχήμα που αποτελείται από συνεχόμενα ευθύγραμμα τμήματα (ευθ.τμήματα.) ,τότε ονομάζουμε:
πλευρές του σχήματος ,αυτά τα ευθ.τμήματα
κορυφές του σχήματος ,τα σημεία που ενώνονται 2-πλευρές (δηλ: 2 ευθ.τμήματα)

2) Συνηθίζουμε να ονομάζουμε τις κορυφές με κεφαλαία ελληνικά γράμματα (π.χ. Α,Β,Γ,Δ,...) και αφού ονομάσουμε την πρώτη κορυφή (Α) τότε συνεχίζουμε για τις υπόλοιπες συνήθως δεξιόστροφα (όπως οι δείκτες του ρολογιού) για να μην μπερδευόμαστε αργότερα.

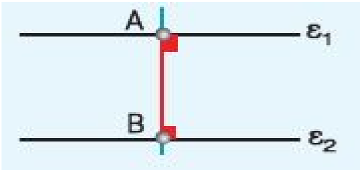
3) α) **Απόσταση 2 σημείων Α και Β** είναι το μήκος του ευθ.τμήματος που τα ενώνει (η πιο σύντομη διαδρομή από το Α στο Β)

β) Απόσταση σημείου Α από ευθεία_(ε) (ή ευθ.τμήμα) είναι το κάθετο ευθ.τμήμα από το σημείο Α στην ευθεία_(ε) (=η πιο σύντομη διαδρομή από το σημείο στην ευθεία).

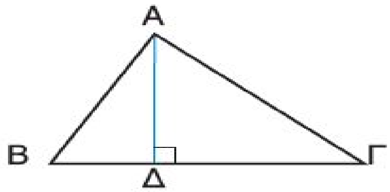
(την οποία βρίσκουμε όπως μας καθοδηγεί το παρακάτω σχήμα (από βιβλίο Ε' δημοτικού)



γ) Απόσταση 2 παράλληλων ευθειών είναι το κάθετο ευθ.τμήμα μεταξύ του (δηλ: και στις 2 ευθείες)



4) Ύψος τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθ.τμήμα από μια κορυφή στην απέναντι πλευρά.
(δηλαδή το ευθ.τμήμα της απόστασης της κορυφής από την απέναντι πλευρά)

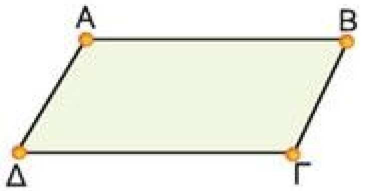


το οποίο βρίσκουμε όπως στο (3β)
[όπου εύκολα μπορούμε να δούμε ότι κάθε τρίγωνο έχει 3 ύψη (αφού έχει 3 κορυφές)]

Τώρα μπορούμε να συνεχίσουμε στην εύρεση των εμβαδών
α) παραλληλογράμμου
β) τυχαίου τριγώνου

Έχουμε λοιπόν:

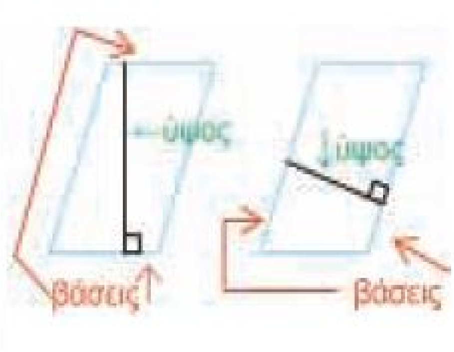
α) Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ λέγεται το 4-πλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες (δηλαδή στο παρακάτω σχήμα ισχύει:



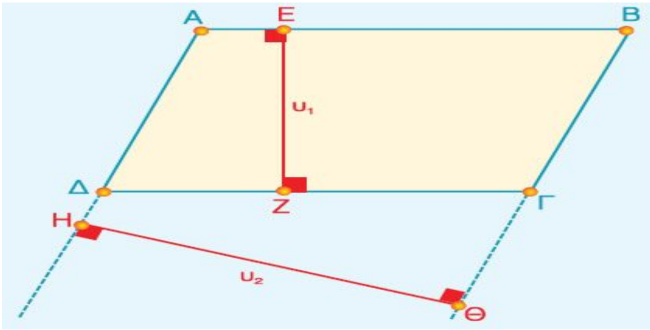
ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ

Σε κάθε παραλληλόγραμμο επιλέγοντας μια πλευρά του ως: **βάση = β**
τότε ορίζουμε ως **ύψος = υ** την απόσταση της βάσης από την απέναντι παράλληλη πλευρά της

(δες στο παρακάτω σχήμα τις δύο **διαφορετικές αλλά ισοδύναμες** περιπτώσεις)



δηλαδή



και έχουμε ότι:

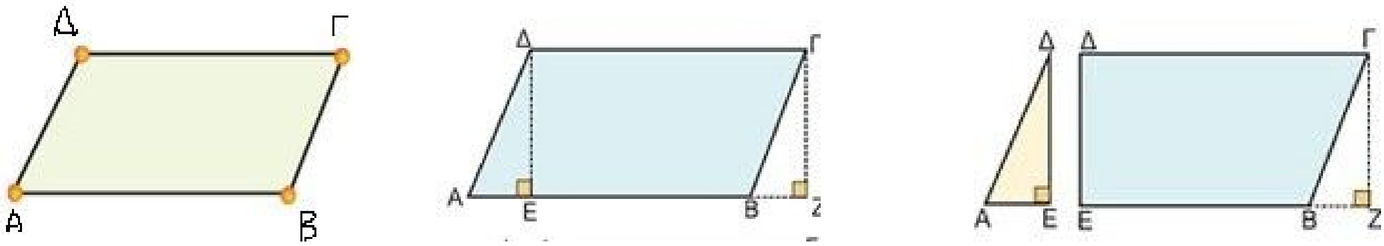
$$E_{παραλ/μου} = β \cdot υ$$

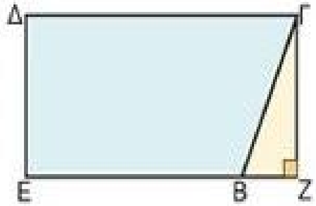
$$= AB \cdot υ_1$$

$$= AΔ \cdot υ_2$$

δηλαδή επιλέγοντας τη βάση και το αντίστοιχο ύψος ισχύει ότι $\mathbf{E_{παραλ/μου} = β \cdot υ}$

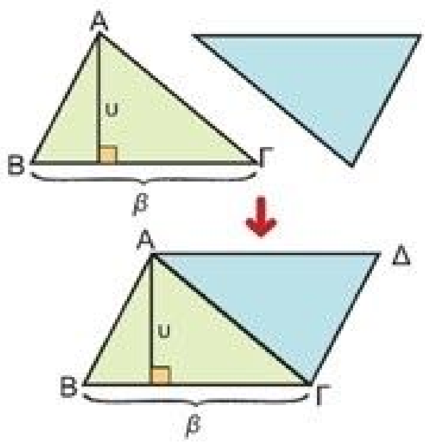
(όπου παρατηρώντας παραπάνω τον τύπο $E_{παραλ/μου} = β \cdot υ$ βλέπουμε ότι είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν του ορθογ.παραλληλόγραμμου ,κάτι που εύκολα προκύπτει και διαισθητικά και από τα παρακάτω διαδοχικά σχήματα :





β) Για το **εμβαδόν ενός τυχαίου τριγώνου** έχουμε ότι:

Αν θεωρήσουμε 2 **ίδια** τριγωνα το ένα ανάποδα (σε σχέση με το άλλο) και δίπλα ,τότε ενώνοντάς τα όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα



παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ

με βάση β= ΒΓ και ύψος = υ (όπως έχουμε ορίσει στο σχήμα)

του οποίου το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο: $E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon} = \beta \cdot \upsilon$ (όπως είδαμε παραπάνω)

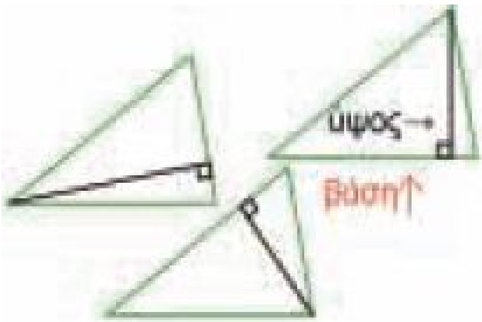
Όπου όμως εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ενός τριγώνου (θυμόμαστε ότι έχουμε πάρει 2 ίσα τρίγωνα και τα ενώσαμε για να πάρουμε το παραλληλόγραμμο)

Άρα θα ισχύει ότι: $E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \dfrac{E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon}}{2}$

$$= \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Δηλαδή έχουμε ότι : $E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

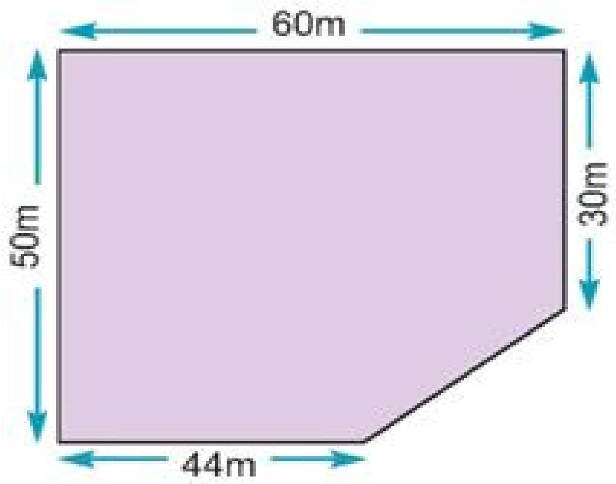
Παρατήρηση: Γνωρίζουμε ότι κάθε τρίγωνο έχει 3 ύψη (όσα και οι πλευρές/κορυφές στις οποίες και αντιστοιχεί το καθένα όπως φαίνεται και από παρακάτω σχήμα του σχολικού μας βιβλίου)



Οπότε **όταν επιλέγουμε** μια πλευρά του τριγώνου για βάση θα πρέπει στον παραπάνω τύπο υπολογισμού εμβαδού τριγώνου να βάζουμε και το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή την πλευρά **και ΟΧΙ** όποιο εμείς θέλουμε .

Ασκήσεις

1)



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος.

α) Να βρεθεί η έκταση του κτήματος σε $\mu.^2$ (τ.μ.)

β) Αν το κτήμα πωλείται προς 20.000 ευρώ το στρέμμα ,να βρείτε την αξία του κτήματος.

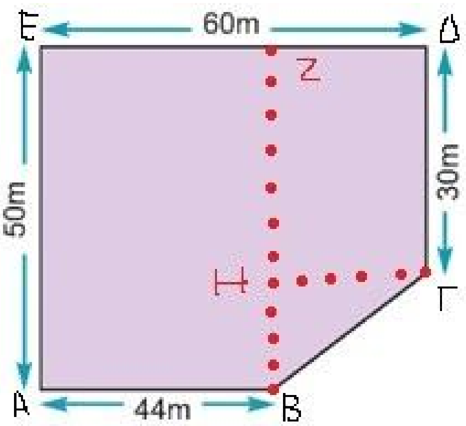
γ) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό,αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 $\mu.^2$ (τ.μ.) ;

<u>Σημείωση</u>: Οι μονάδες μέτρησης στο διπλανό σχήμα είναι σε μέτρα (δηλ. meter = m = μ.)

(προσαρμοσμένη Άσκηση από το σχολικό βιβλίο β' Γυμνασίου)

<u>Λύση</u>

α) Λόγω του ότι το σχήμα μας (του κτήματος) δεν είναι κάποιο από τα γνωστά ,των οποίων γνωρίζουμε τους τύπους των εμβαδών τους και παρατηρώντας ότι μπορούμε όμως να χωρίσουμε το σχήμα μας σε γνωστά, (δες παρακάτω σχήμα με τις διακεκομμένες κόκκινες γραμμές) έχουμε ότι:



Το αρχικό μας σχήμα χωρίζεται σε:

- **Ορθογώνιο ΑΒΖΕ**
- **Ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΗ**
- **Ορθογώνιο ΗΓΔΖ**

των οποίων, βρίσκοντας και προσθέτοντας τα εμβαδά, θα βρούμε και το ζητούμενο εμβαδό $E_{\text{Σχήματος ΑΒΓΔΕ}}$

Οπότε για τα 3-νέα σχήματα που προέκυψαν, έχουμε ότι:

- **για το Ορθογώνιο ΑΒΖΕ**

β = βάση = ΑΒ = 44μ.
υ = ύψος = ΑΕ = 50μ. =

Άρα $E_{\text{Ορθπγώνιου ΑΒΖΕ}}$ = β • υ = 44 • 50 = 2.200 $\mu.^2$ (τ.μ.)

- **για το Ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΗ**

β = βάση = ΗΒ = 50 - 30 = 20 μ.
υ = ύψος = ΗΓ = 60 - 44 = 16 μ.

Άρα $E_{\text{Ορθογ.τριγ ΒΓΗ}} = \frac{\beta \bullet \upsilon}{2} = \frac{20 \bullet 16}{2} = \frac{320}{2}$ = 160 $\mu.^2$ (τ.μ.)

- **για το Ορθογώνιο ΗΓΔΖ**

β = βάση = ΗΓ = 16μ.
υ = ύψος = ΗΖ = 30μ.

$E_{\text{Ορθογωνίου ΗΓΖΔ}}$ = β • υ = 16 • 30 = 480 $\mu.^2$ (τ.μ.)

Άρα θα έχουμε: $E_{\text{Σχήματος ΑΒΓΔΕ}} = E_{\text{Ορθπγώνιου ΑΒΖΕ}} + E_{\text{Ορθογ.τριγ ΒΓΗ}} + E_{\text{Ορθογωνίου ΗΓΖΔ}}$

= 2.200 + 160 + 480

= **2.840** $\mu.^2$ **(τ.μ.)**

Δηλαδή η **Έκταση του κτήματος =** $E_{\text{Σχήματος ΑΒΓΔΕ}}$ **= 2.840** $\mu.^2$ **(τ.μ.)**

β) Μετατρέπουμε τα 2.840 $\mu.^2$ (τ.μ.) σε στρέμματα (1 στρέμμα = 1000 $\mu.^2$ (τ.μ.) δες φύλλο 2)

όπου είναι: 2.840 $μ.^2$ = $\frac{2840}{1000}$ = 2,84 στρέμματα (το κτήμα)

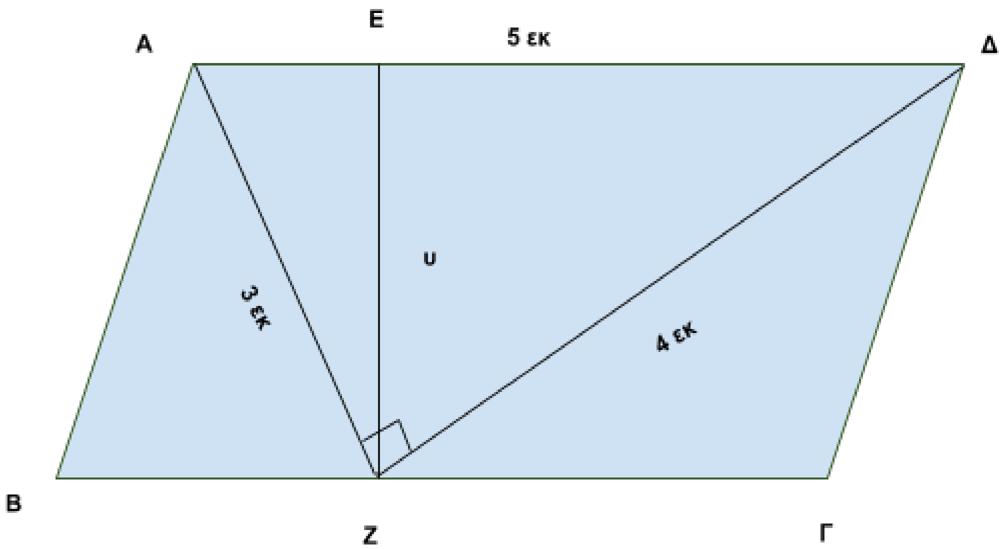
Άρα, αφού κάθε στρέμμα αξίζει 20.000ευρώ, τότε η συνολική αξία του κτήματος (= 2,84 στρέμματα) θα είναι:

Αξία κτήματος = 2,84 • 20.000 **= 56.800 ευρώ**

γ) Αφού το κτήμα έχει έκταση 2,84 στρέμματα = 2.840 $μ.^2$ και για κάθε κλήμα χρειάζονται 2,5 $μ.^2$ τότε στο κτήμα μπορούν να φυτευτούν

$\frac{2.840}{2,5}$ = **1,136 κλήματα**

2) Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ορθογώνιο.
Να υπολογίσετε:
α) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΖΔ.
β) Το ύψος **υ** του τριγώνου ΑΖΔ
γ) Το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Αφού το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ορθογώνιο (με κάθετες πλευρές τις ΑΖ και ΖΔ ,όπως φαίνεται από το σχήμα), τότε έχουμε ότι

$E_{ορθ.τριγ\ ΑΖΔ} = \frac{βάση \cdot ύψος}{2}$, όπου (έστω) η βάση = ΑΖ και το ύψος = ΖΔ

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$E_{ορθ.τριγ\ ΑΖΔ} = \frac{ΑΖ \cdot ΖΗ}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$= 6\,εκ^2 \text{ (τ.εκ.)}$$

β) Το παραπάνω εμβαδό το βρήκαμε, θεωρώντας όπως είδαμε ως βάση = ΑΖ και ύψος = ΖΔ

Αφού όμως τώρα **θέλουμε να βρούμε το ύψος = υ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ του τριγώνου ΑΖΔ**
και γνωρίζουμε το $E_{ορθ.τριγ\ ΑΖΔ} = 6\,εκ^2$ από το ερώτημα α) ,τότε θεωρώντας ώς βάση την πλευρά ΑΔ = 5 εκ.
παίρνουμε:

$$E_{ορθ.τριγ\ ΑΖΔ} = \frac{βάση \cdot ύψος}{2}$$

$$6 = \frac{ΑΔ \cdot υ}{2}$$

$$6 \cdot 2 = 5 \cdot υ$$

$$12 = 5 \cdot υ$$

$$\mathbf{υ = \frac{12}{5} = 2{,}4\ εκ.}$$

γ) Αφού βρήκαμε ότι υ = 2,4εκ. ,και θεωρώντας ως βάση την πλευρά ΑΔ= 5εκ. του παραλ/μου ΑΒΓΔ τότε έχουμε ότι:

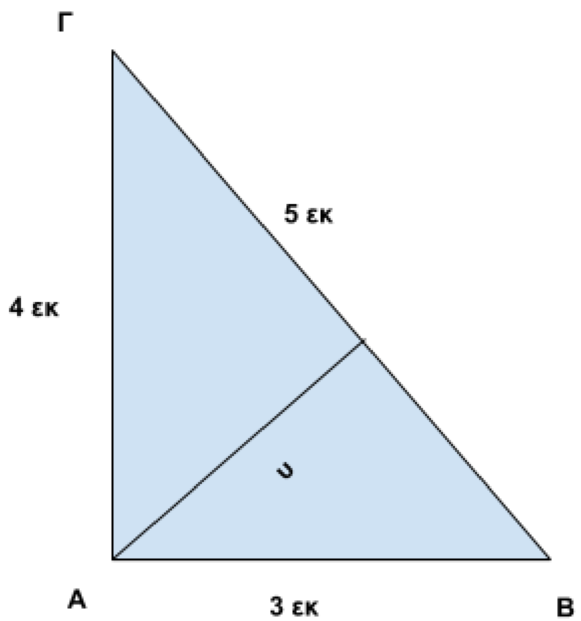
$$E_{\text{παραλ/μου ΑΒΓΔ}} = \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$$

$$= ΑΔ \cdot υ$$

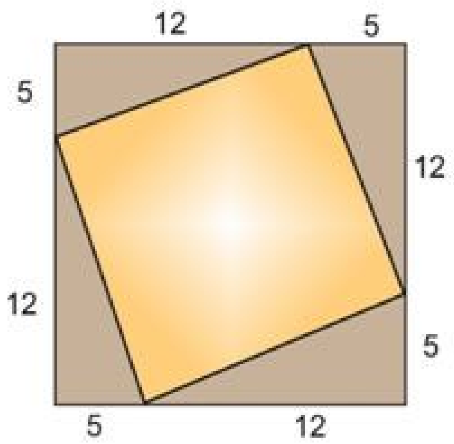
$$= 5 \cdot 2,4$$

$$= 12\ εκ^2\ \text{(τ.εκ.)}$$

3) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε το ύψος (**υ**) που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.



4)



Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου (όπου και το μεγάλο τετράπλευρο είναι και αυτό τετράγωνο)
(Άσκηση β' γυμνασίου)

<u>σχόλιο</u>: Δεν σας έχω βάλει μονάδα μέτρησης στα μήκη ,οπότε μπορείτε ελεύθερα να επιλέξετε εσείς μια ***και σας προτρέπω*** ,όταν βρείτε το τελικό αποτέλεσμα (στη μονάδα μέτρησης που εσείς επιλέξατε) ,να το μετατρέψετε **και** σε όλες τις υπόλοιπες γνωστές (όπως τις έχουμε πει και δει στο **Φύλλο 1**)

<u>Λύσεις Ασκήσεων</u> 3 και 4

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση των δυο ασκήσεων ,να διευκρινίσουμε /παρατηρήσουμε ότι:

ο τύπος που μας δίνει το εμβαδό ενός τυχαίου τριγώνου (δηλ ο τύπος **για όλες τις περιπτώσεις τριγώνων**) **είναι ένας**:

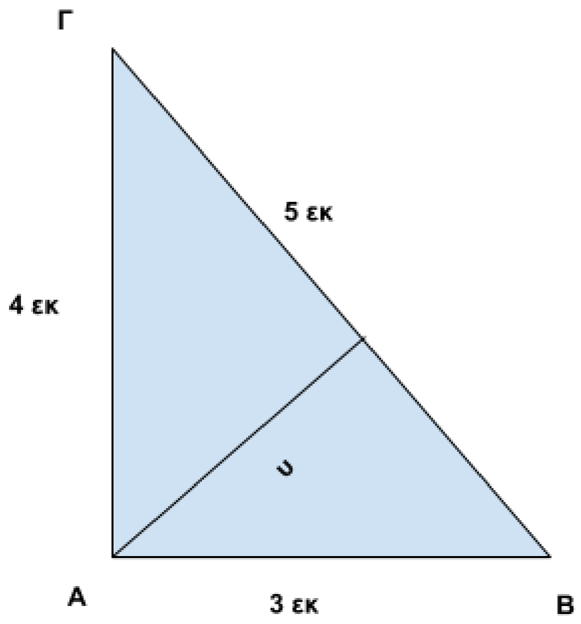
$$E_{τριγώνου} = \frac{β \cdot υ}{2} \quad (\star)$$

Συνεπώς ,**και** για τα ορθογώνια τρίγωνα (ως μια ιδιαίτερα καλή και χρήσιμη υποκατηγορία τριγώνων) ισχύει ακριβώς ο ίδιος τύπος, όπου σε αυτά (τα ορθ.τρίγωνα) ,αν επιλέξουμε **μία από τις κάθετες πλευρές του ως βάση** ,τότε αυτόματα **η άλλη κάθετη πλευρά του <u>είναι το ύψος του τριγώνου που της αντιστοιχεί</u>**.

έτσι προκύπτει ο τύπος (στα ορθ.τριγωνα) $E_{ορθ.τριγώνου} = \frac{\text{κάθετη πλευρά} \cdot \text{κάθετη πλευρά}}{2} = \frac{β \cdot υ}{2}$

Κρατάμε δηλαδή ότι ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού ,**ενός οποιουδήποτε τριγώνου** είναι ο παραπάνω $(\star)$ **και καλό είναι να** έχουμε στο μυαλό μας και να χρησιμοποιούμε αυτόν, και όπου χρειάζεται και είναι εύκολο ,να τον προσαρμόζουμε κάθε φορά στις ιδιαίτερες κατηγορίες τριγώνων (και σύμφωνα με την εμπειρία και ευχέρεια που θα αναπτύσσουμε σιγά σιγά και **όσο εξασκούμαστε με ασκήσεις και σχήματα**).

3) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε το ύψος (**υ**) που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.



<u>Λύση</u>

(Η άσκηση είναι ακριβώς η ίδια με την Άσκηση 2)

Έχουμε από την εκφώνηση ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ,**με κάθετες πλευρές τις ΑΓ και ΑΒ**

Οπότε

- (⋆) <u>θεωρώντας ως βάση την ΑΒ και ύψος την ΑΓ</u> (**δηλ: β = ΑΒ και υ = ΑΓ**) έχουμε ότι:

$$E_{\text{ορθ.τριγ ΑΒΓ}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

$$= \frac{AB \cdot A\Gamma}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ εκ}^2 \text{ (τ.εκ.)}$$

- (⋆⋆) <u>θεωρώντας ως βάση την ΒΓ = 5 εκ. και ως ύψος = υ</u> (το ζητούμενο) έχουμε ότι:

$$E_{ορθ.τριγ\ ΑΒΓ} = \frac{β \cdot υ}{2}$$ [όπου από παραπάνω έχουμε ότι $E_{ορθ.τριγ\ ΑΒΓ} = 6$ $εκ^2$ (τ.εκ.)]

Άρα ,αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο τα δεδομένα μας θα έχουμε ότι ισχύει:

$$6 = \frac{ΒΓ \cdot υ}{2} \quad (\star\star\star)$$

$$6 = \frac{5 \cdot υ}{2}$$

$6 \cdot 2 = 5 \cdot υ$ (δηλαδή το αρχικό μας πρόβλημα μετασχηματίστηκε στην επίλυση μιας εξίσωσης την οποία γνωρίζουμε να επιλύουμε)

$12 = 5 \cdot υ$

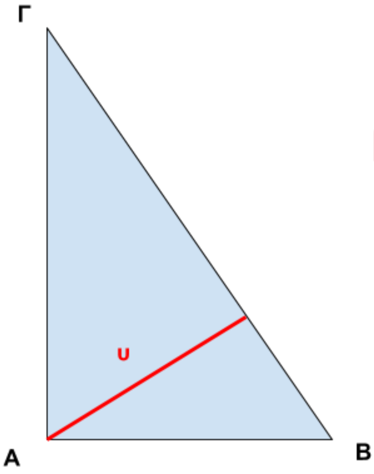
δηλ: $5 \cdot υ = 12$

$$υ = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ εκ.}$$

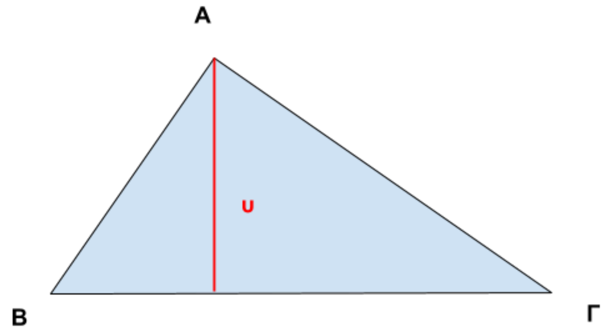
[Από τα παραπάνω βλέπουμε πώς ένα πρόβλημα γεωμετρίας ,μάς οδήγησε στην κατασκευή και επίλυση μιας εξίσωσης.

Ουσιαστικά είδαμε το ίδιο πράγμα (το $E_{ορθ.τριγώνου\ ΑΒΓ}$) από δύο διαφορετικές οπτικές πλευρές **(δες παραπάνω** $(\star)$ **και** $(\star\star)$ τις **διαφορετικές επιλογές βάσεων και υψών** ,οι οποίες σχηματοποιούνται στα παρακάτω δυο σχήματα (το 2ο προέκυψε με περιστροφή του 1ου ώστε να φαίνεται ότι επιλέξαμε ως βάση την πλευρά ΒΓ και το ύψος = **υ** που της αντιστοιχεί**)** και έτσι ,αφού μιλάμε για το ίδιο πράγμα ,αυτές θα είναι ίσες (δηλ προκύπτει η σχέση/εξίσωση $(\star\star\star)$)

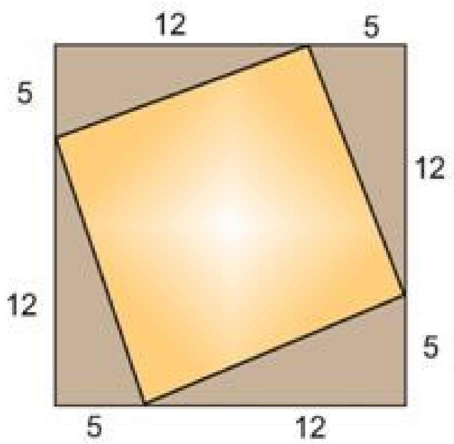
Έτσι δηλαδή προέκυψε η εξίσωση $(\star\star\star)$,που η επίλυσή της μάς οδήγησε στο ζητούμενο **]**.



Σχήμα (∗)



Σχήμα (∗∗)



4) Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου (όπου και το μεγάλο τετράπλευρο είναι και αυτό τετράγωνο)
(Άσκηση β' γυμνασίου)

<u>σχόλιο</u>: Δεν σας έχω βάλει μονάδα μέτρησης στα μήκη ,οπότε μπορείτε ελεύθερα να επιλέξετε εσείς μια ***και σας προτρέπω*** ,όταν βρείτε το τελικό αποτέλεσμα (στη μονάδα μέτρησης που εσείς επιλέξατε) ,να το μετατρέψετε **και** σε όλες τις υπόλοιπες γνωστές (όπως τις έχουμε πει και δει στο **1**)

<u>Λύση</u>

Αφού αφήνεται σε εμάς η αρχική επιλογή της μονάδας μέτρησης του μήκους ,επιλέγω/ουμε αρχικά τα **μέτρα = μ.** (και στο τέλος θα κάνουμε όλες τις υπόλοιπες μετατροπές)

Οπότε έχουμε ότι:

α) Τα 4 ορθ.τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδό γιατί:

επιλέγοντας ως βάση την πλευρά με μήκος 5εκ. (η ίδια είναι και για τα 4 ορθ.τρίγωνα)

και επιλέγοντας ως ύψος την πλευρά με μήκος 12εκ. (το ίδιο είναι και για τα 4 ορθ.τρίγωνα)

είναι $E_{ορθ.τριγώνου} = \frac{β \bullet υ}{2} = \frac{5 \bullet 12}{2} = \frac{60}{2} = 30$ εκ.^{2} (τ.εκ.) (και για τα 4 ορθ.τρίγωνα)

β) για το μεγάλο τετράγωνο έχουμε ότι:

α = πλευρά = 12 + 5 = 17 μ.

Άρα το $E_{μεγάλου\ τετραγώνου} = α^2 = 17^2 = 289$ μ.^{2}

γ) Άρα από τα α) και β) θα έχουμε ότι: $E_{μικρού\ τετραγώνου} = E_{μεγάλου\ τετραγώνου} - 4 \bullet E_{ορθ.τριγώνου}$

$= 289 - 4 \bullet 30$

$= 289 - 120$

$= 169$ μ.^{2}

δηλαδή το ζητούμενο $E_{μικρού\ τετραγώνου} = 169$ μ.^{2}

δ) Οπότε για τις μετατροπές των μ.^{2} έχουμε ότι :

- **μετατροπή σε στρέμματα**

169 μ.^{2} = $\frac{169}{1000}$ = 0,169 στρέμματα

- **μετατροπή σε** $\chi\mu.^2$ **,** $\delta\epsilon\kappa.^2$ **,** $\epsilon\kappa.^2$ **,** $\chi\iota\lambda.^2$

έχουμε ότι:

169 $\mu.^2 = \frac{169}{1.000.000}$ = 0,000169 $\chi\mu.^2$

και

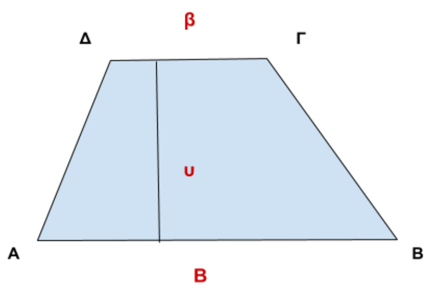
169 $\mu.^2$ = 169 • 100 = 16.900 $\delta\epsilon\kappa.^2$
= 16.900 • 100 = 1.690.000 $\epsilon\kappa.^2$
= 1.690.000 • 100 = 169.000.000 $\chi\iota\lambda.^2$

συγκεντρωμένες όλες τις παραπάνω μετατροπές στη σειρά ,έχουμε:

0,000169 $\chi\mu.^2$ = 0,000169 • **1.000.000** = 169 $\mu.^2$
= 169 • **100** = 16.900 $\delta\epsilon\kappa.^2$
= 16.900 • **100** = 1.690.000 $\epsilon\kappa.^2$
= 1.690.000 • **100** = 169.000.000 $\chi\iota\lambda.^2$

4 - Εμβαδό τραπεζίου

Τραπέζιο ΑΒΓΔ λέγεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες .



όπου:

- οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ** και **ΓΔ** ονομάζονται **βάσεις** του τραπεζίου
- η απόσταση **υ** των δύο βάσεων ονομάζεται **ύψος = υ**

του τραπεζίου
(δηλαδή κάθε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των
δύο βάσεων)

ιδιαίτερα και για ευκολία ,όπως φαίνεται και στο σχήμα ονομάζουμε:
Β = μεγάλη βάση = ΑΒ
β = μικρή βάση = ΓΔ

<u>**Για το εμβαδό τώρα**</u> του τραπεζίου ,μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

αν θεωρήσουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και άλλο ένα ίσο με το πρώτο ,τοποθετώντας τα το ένα δίπλα στο άλλο και το δεύτερο “ανάποδα” σε σχέση με το πρώτο ,τότε ενώνοντάς τα (όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα , το πρώτο με χρώμα μπλε και το δεύτερο με πράσινο) **σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο** όπου βλέπουμε ότι:

η βάση του είναι: $\beta\acute{\alpha}\sigma\eta_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon}$ = ΑΒ + ΓΔ **= Β +β** (δηλαδή $\beta\acute{\alpha}\sigma\eta_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon}$ **= Β + β**) (★)

και το ύψος του (παραλληλογράμμου) είναι το ίδιο με το ύψος του τραπεζίου

$$\acute{\upsilon}\psi o\varsigma_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon} = \acute{\upsilon}\psi o\varsigma_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} = \mathbf{\upsilon} \quad (\star\star)$$

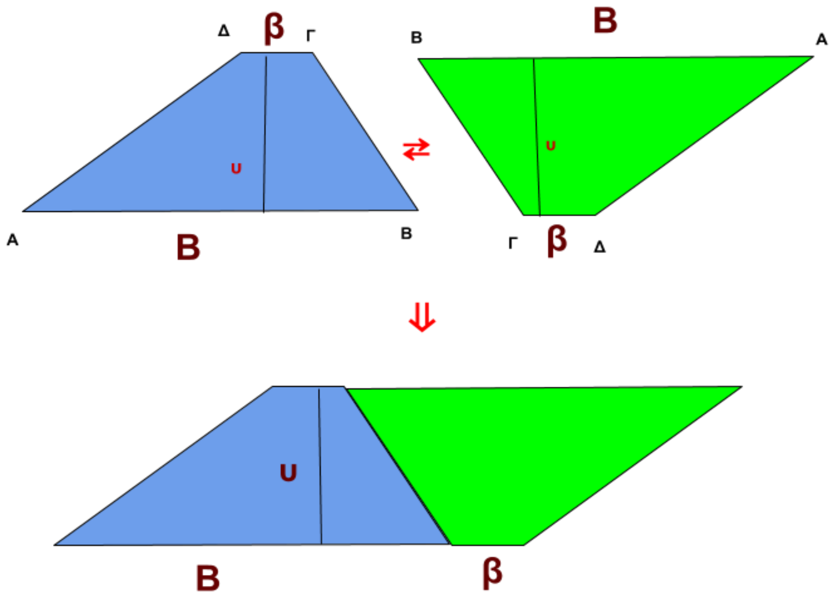
Άρα για το εμβαδό του παραλληλογράμμου θα έχουμε ότι:

[ΔΕΝ ξεχνάμε ότι αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε/βρούμε ,είναι το εμβαδό του τραπεζίου**]**

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon} = \beta\acute{\alpha}\sigma\eta_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon} \bullet \acute{\upsilon}\psi o\varsigma_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon}$$ (αντικαθιστούμε από τις σχέσεις (★) και (★★))

$$= (B + \beta) \bullet \upsilon$$

Δηλαδή: $E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda/\mu o\upsilon}$ = **(Β + β) • υ** (★★★)



Όμως εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε/βρούμε το εμβαδό του (ενός/αρχικού) τραπεζίου.

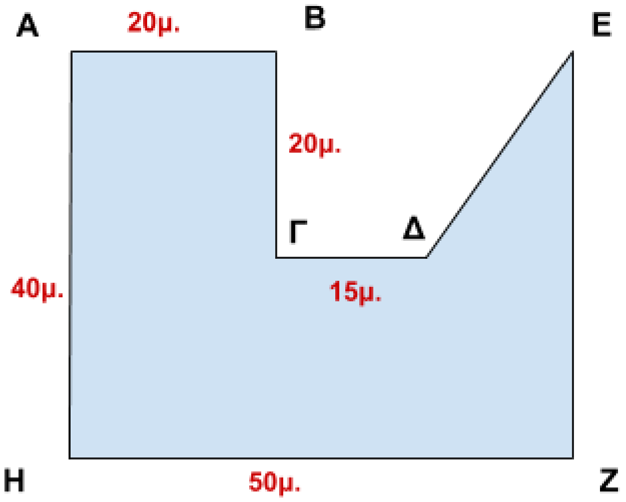
Άρα θα ισχύει ότι $E_{τραπεζίου} = \dfrac{E_{παραλ/μου}}{2}$ (αντικαθιστούμε από την σχέση (★★★))

$$= \frac{(B + β) \cdot υ}{2}$$

Δηλαδή έχουμε ότι: $E_{τραπεζίου} = \dfrac{(B + β) \cdot υ}{2}$

Παράδειγμα:

1) Το παρακάτω σχήμα είναι το τοπογραφικό σχέδιο ενός οικοπέδου.
Να υπολογίσετε το εμβαδό του σε στρέμματα.



<u>Λύση</u>

<u>α' τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι το σχήμα ΑΗΖΕ είναι ορθογώνιο με **β** = βάση = ΗΖ **= 50μ. και υ** = ύψος = ΑΗ **= 40μ.**
Οπότε αν από το παραπάνω (γαλάζιο) ορθογώνιο αφαιρέσουμε το εμβαδό του (άσπρου) τραπεζίου ΒΓΔΕ θα έχουμε το ζητούμενο εμβαδό ,του οικοπέδου.

οπότε έχουμε ότι:

$$E_{\text{ορθόγ. ΑΗΖΕ}} = \beta \cdot \upsilon$$

$$= 50 \cdot 40$$

$$= 2000 \text{ μ.}^2$$

και για το τραπέζιο ΒΕΔΓ έχουμε ότι: **Β** = βάση μεγάλη = ΒΕ = 50 - 20 **= 30μ.** , **β** = βάση μικρή = ΓΔ **= 15μ.**

και **υ** = ύψος = ΒΓ **= 20μ**

Άρα $$E_{\text{τραπεζίου ΒΓΔΕ}} = \frac{(B + \beta) \bullet \upsilon}{2}$$

$$= \frac{(30 + 15) \bullet 20}{2}$$

$$= \frac{45 \bullet 20}{2}$$

$$= 450 \ \mu.^2$$

$$E_{\text{οικοπέδου}} = E_{\text{ορθόγ. ΑΗΖΕ}} - E_{\text{τραπεζίου ΒΓΔΕ}}$$

$$= 2000 \ \mu.^2 - 450 \ \mu.^2$$

$$= \mathbf{1550} \ \mu.^2$$

$$= \frac{1550}{1000}$$

= **1,55 στρέμματα**

Άρα $E_{\text{οικοπέδου}}$ = **1550** $\mu.^2$ = **1,55 στρέμματα**

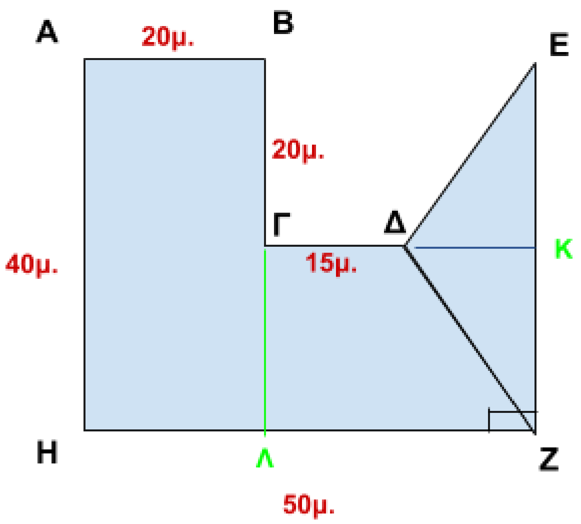
<u>β’τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι το σχήμα μας (του οικοπέδου) μπορεί να χωριστεί σε γνωστά σχήματα ,των οποίων γνωρίζουμε τον τύπο του εμβαδού τους.

Μια από τις επιλογές χωρισμού του οικοπέδου σε γνωστά σχήματα είναι η εξής:

προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ μέχρι να “ακουμπήσει” στην πλευρά ΗΖ (πράσινη γραμμή)
και φέρνουμε ΔΖ (μαύρη γραμμή)

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Οπότε το οικόπεδό μας χωρίζεται σε

- ένα ορθογώνιο ΑΒΛΗ με **β** = βάση = ΗΛ **= 20μ.** και **υ** = ύψος = ΑΗ **= 40μ.**

Άρα $E_{\text{ορθογ ΑΒΛΗ}} = \beta \cdot \upsilon$

$= 20 \cdot 40$

$= 800\ \mu^2$

- ένα τραπέζιο ΓΔΖΛ με **Β** = βάση μεγάλη = ΛΖ = 50 - 20 = **30μ.** **β** = βάση μικρή = ΓΔ = **15μ.**

και **υ** = ύψος = ΓΛ = 40 - 20 = **20μ.**

Άρα $E_{\text{τραπεζίου ΓΔΖΛ}} = \dfrac{(B + \beta) \bullet \upsilon}{2}$

$= \dfrac{(30 + 15) \bullet 20}{2}$

$= \dfrac{45 \bullet 20}{2}$

= 450 μ^2

- και τέλος το τρίγωνο ΔΕΖ ,με **β** = βάση = ΕΖ = **40μ.** και **υ** = ύψος = ΔΚ = 50 - 20 - 15 = **15μ.**

Άρα $E_{\text{τριγ ΔΕΖ}} = \dfrac{\beta \bullet \upsilon}{2}$

$= \dfrac{40 \bullet 15}{2}$

= 300 μ^2

Άρα έχουμε ότι:

$E_{\text{οικοπέδου}} = E_{\text{ορθογ ΑΒΛΗ}} + E_{\text{τραπεζίου ΓΔΖΛ}} + E_{\text{τριγ ΔΕΖ}}$

= 800 μ^2 + 450 μ^2 + 300 μ^2

= **1550** μ^2

$= \dfrac{1550}{1000}$

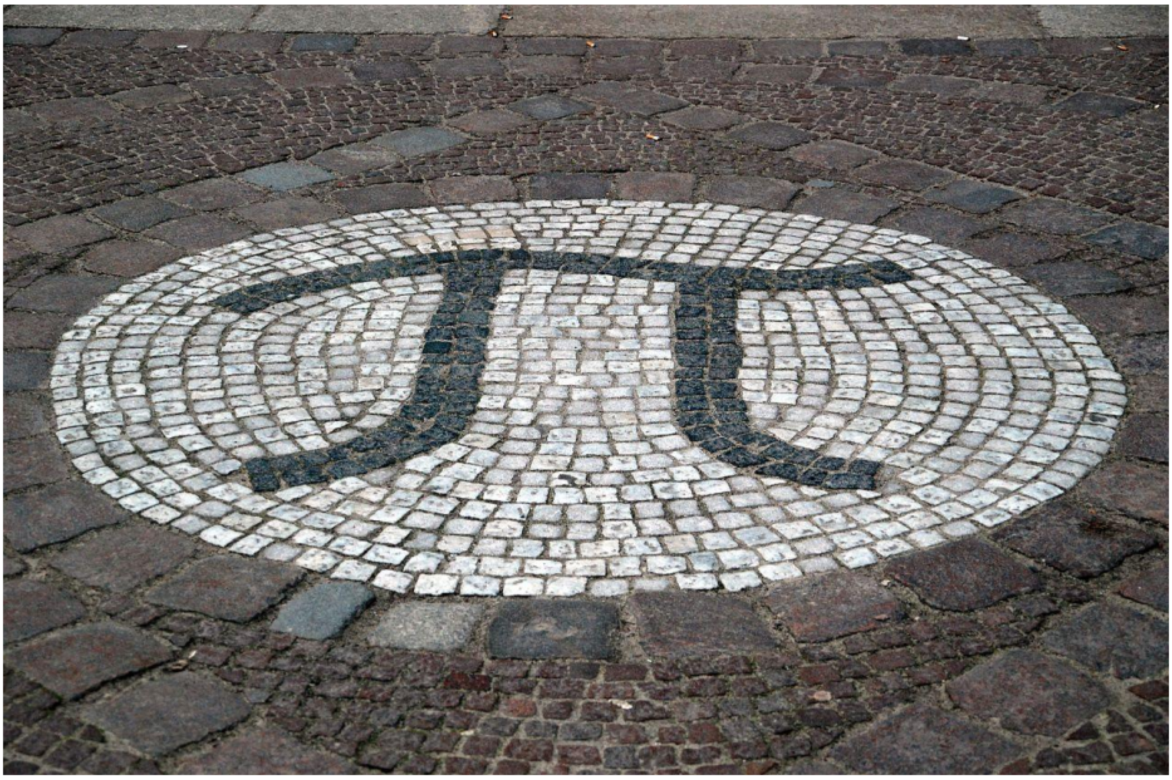
= **1,55 στρέμματα**

Δηλαδή όπως και στον <u>α΄τρόπο</u> βρήκαμε ότι:

$$E_{οικοπέδου} = \mathbf{1550}\ μ.^2 = \mathbf{1{,}55\ στρέμματα}$$

Ως εργασία/ενασχόληση ,σας προτρέπω να κάνετε μια νέα ,δική σας επιλογή χωρισμού του αρχικού σχήματος/οικοπέδου σε γνωστά σχήματα ,ώστε να υπολογίσετε με έναν δικό σας τρόπο ,το εμβαδό του οικοπέδου.

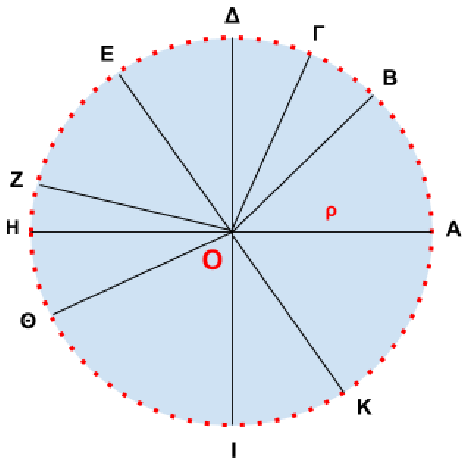
5 - Εμβαδό Κύκλου (ή Κυκλικού δίσκου)



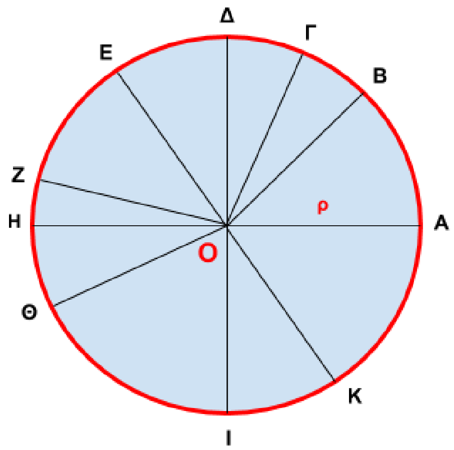
Μωσαϊκό που απεικονίζει τη σταθερά - π - στην είσοδο του τμήματος των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Βερολίνου

Ας επιλέξουμε ένα σημείο σε μια σελίδα του τετραδίου μας ή σε ένα χαρτόνι ,το οποίο ας το ονομάσουμε **Ο** και με τον χαρακά μας να φτιάξουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΟΑ ,**το οποίο να έχει μήκος **ρ εκ.**
Με αρχή το ίδιο σημείο **Ο** και μήκος πάλι **ρ εκ.** φτιάχνουμε ένα άλλο,διαφορετικό ευθ.τμήμα **ΟΒ.**
Πάλι με αρχή το σημείο **Ο** και μήκος πάλι **ρ εκ.** φτιάχνουμε ένα άλλο,πάλι διαφορετικό ευθ.τμήμα **ΟΓ.**
Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία αρκετές φορές παίρνουμε τα ευθ.τμήματα **ΟΔ** ,**ΟΕ** ,**ΟΖ** , **ΟΗ** ,**ΟΘ** ,**ΟΙ** , **ΟΚ** ,**. . . . .**
Παρατηρούμε ότι παίρνοντας αρκετά τέτοια ευθ.τμήματα (**όλα με την ίδια αρχή Ο**) και τονίζοντας με κόκκινο μαρκαδόρο τις άκρες Α ,Β , Γ , Δ , Ε ,Ζ ,Η ,Θ ,Ι ,Κ ,...... των αντίστοιχων ευθ.τμημάτων ,προκύπτει το παρακάτω **σχήμα α’** .
Τοποθετώντας τώρα **σταθερά τη μια άκρη** (την ακίδα) του διαβήτη μας ,με **σταθερό άνοιγμα** όσο το μήκος του ευθ.τμήματος ΟΑ (όσο δηλαδή και όλων των υπολοίπων ΟΒ , ΟΓ, ...) και **την άλλη άκρη** (τη γραφίδα) **να ακουμπάει** πάνω στην επιφάνεια του χαρτιού μας ,και περιστρέφοντας τον (διαβήτη), **παίρνουμε το σχήμα του κύκλου** (το οποίο γνωρίζουμε εμπειρικά) ,όπως φαίνεται στο **σχήμα β’** .

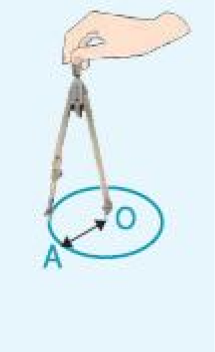
και ονομάζουμε κέντρο του κύκλου το σημείο **Ο** και ακτίνα του το μήκος **ρ**



Σχήμα α’



Σχήμα β’



Δηλαδή επιλέγοντας ,ένα (σταθερό) σημείο του επιπέδου **Ο** και ένα (σταθερό και αυτό) μήκος **ρ** κατασκευάσαμε έναν κύκλο με κέντρο **Ο** και ακτίνα **ρ** (= ΟΑ)

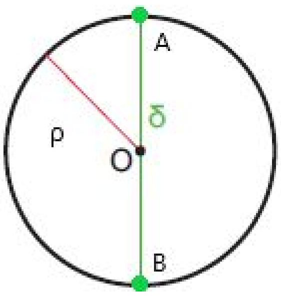
Σχόλιο:Στο σχολικό μας βιβλίο η ακτίνα συμβολίζεται με το γράμμα **α** ,αλλά εμείς εδώ επιλέγουμε να τη συμβολίζουμε με **ρ** μιας και έχουμε συμβολίσει με - **α** - την πλευρά του τετραγώνου (ώστε να μην υπάρξει σύγχυση στον συμβολισμό) και επιπλέον, λόγω του ότι από τη νέα σας σχολική χρονιά στο Γυμνάσιο και έπειτα ,θα χρησιμοποιείτε το γράμμα - **ρ -** ως συμβολισμό της ακτίνας ενός κύκλου.

Οπότε ,έχοντας κατανοήσει την παραπάνω κατασκευαστική διαδικασία ,μπορούμε τώρα να δούμε τον ορισμό του κύκλου:

Κύκλος (ή περιφέρεια) είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο **Ο**
(δηλαδή όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση (**ρ**) από το σημείο **Ο**.

Και λέμε: **"ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ"** και συμβολίζουμε με **Κύκλος(Ο,ρ)** ή **Κ(Ο,ρ)**

Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό στοιχείο του κύκλου (το οποίο όμως προκύπει από την ακτίνα του) είναι η <u>διάμετρός</u> του.



Αν βάλουμε τον χάρακά μας πάνω στο κέντρο ενός κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα = ρ, και φτιάξουμε/φέρουμε το ευθ.τμήμα που διέρχεται/περνάει από το κέντρο - Ο - του κύκλου και το οποίο (το ευθ.τμήμα) έχει άκρα τα δυο σημεία Α και Β που τέμνει ο χάρακας τον κύκλο ,τότε **το ευθ.τμήμα ΑΒ που σχηματίσαμε ,ονομάζεται διάμετρος του κύκλου** (συμβολίζεται με **δ = διάμετρος**)

και παρατηρούμε ότι: ΟΑ = ΟΒ = ρ

Άρα: δ = διάμετρος = ΑΒ
= ΑΟ + ΟΒ
= ρ + ρ
= 2 • ρ

Δηλαδή **δ = 2 • ρ**

Μήκος κύκλου (ή περιφέρεια ή περίμετρος) :

$$\text{Μήκος}_{\text{κύκλου}} = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

(όπου **π** = 3,14 [2])

(είδαμε παραπάνω ότι **δ = 2 • ρ)**

$$= 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

Εμβαδό Κύκλου (ή Κυκλικού δίσκου) : $E_{\text{κυκλικού δίσκου}} = \pi \cdot \rho^2$

[Ιούνιος 2020
Αθήνα - Παγκράτι
2ο Δημοτικό Σχολείο Αθηνών

Η δασκάλα του ΣΤ2 Φωτεινή Μπαγέρη]

[2] Ο αριθμός **π** είναι μια μαθηματική σταθερά η οποία από την αρχαιότητα ορίζεται ως ο λόγος του Μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του.Είναι δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία ,η θέση των οποίων φαίνεται να βρίσκονται σε τυχαία σειρά (δηλαδή να μην εμπεριέχονται σε κάποιο μοτίβο) ,χωρίς να υπάρχει όμως κάποια απόδειξη γι'αυτό (όπως και για το αντίθετο).
Στο πέρασμα όλων αυτών των χρόνων πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί ,όπως ο Αρχιμήδης στην αρχαιότητα αλλά και νεότεροί του όπως οι Νεύτωνας (Isaac Newton*)* ,Γκάους (Carl Friedrich Gauss) ,και Όιλερ (*Leonhard Euler) ασχολήθηκαν με σκοπό την κατανόηση και τον ακριβή υπολογισμό του μιας και συναντάται σχεδόν σε όλες τις εφαρμογές των μαθηματικών ιδιαίτερα στις θετικές επιστήμες.*
Το σύμβολο που χρησιμοποιείται από τους μαθηματικούς για την αναλογία της περιφέρειας ενός κύκλου προς την διάμετρό του ,είναι το ελληνικό γράμμα - **π** *- το οποίο καθιερώθηκε από τον* Όιλερ (*Leonhard Euler).*
(πηγή: wikipedia)

ΜΕ ΠΟΛΛΗ ΑΓΑΠΗ ΣΤΗΝ ΚΥΡΙΑ ΦΩΤΕΙΝΗ ΑΠΟ ΤΟΝ... ΦΙΛΙΠΠΟ!!!

26/6/2020!

ΦΠ
2020